

MACIERZE LOSOWE

Symulacje komputerowe

1. Dla jednej rzeczywistej symetrycznej macierzy losowej Wignera X_n wymiaru $n \times n$ z normalizacją i założeniami jak w Twierdzeniu 1, gdzie elementy macierzowe są postaci $X_{i,j} = (1/\sqrt{n})A_{i,j}$, z losowo wyznaczonymi elementami macierzowymi $(A_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, wyznaczyć wykres rozkładu wartości własnych tej macierzy, gdy
 - (a) $n \in \{25, 50, 100\}$ i zmienne $A_{i,j}$ mają rozkład $N(0, 1)$,
 - (b) $n \in \{25, 50, 100\}$ i zmienne $A_{i,j}$ mają rozkład Bernoulliego $B(0, 1)$,
 - (c) $n \in \{25, 50, 100\}$ i zmienne $A_{i,j}$ mają rozkład Wignera $W(0, 1)$.

Porównać otrzymane wykresy z wykresem standardowego rozkładu Wignera. Symbole $N(0, 1)$, $B(0, 1)$, $W(0, 1)$ oznaczają standardowe rozkłady Gaussa, Bernoulliego i Wignera (średnia zero, wariancja jeden). W szczególności: $B(0, 1)$ ma miarę dwupunktową $1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$.

2. Wygenerować 10 macierzy losowych takich jak opisane w zadaniu poprzednim o wymiarze 10×10 , 25×25 oraz 50×50 , a następnie wyznaczyć rozkład otrzymanych wartości własnych, uśredniając wyniki po całej próbie. Porównać wyniki z wynikami z zadania poprzedniego.
3. Dla jednej zespolonej hermitowskiej macierzy losowej Wignera X_n wymiaru $n \times n$, gdzie $X_{i,j} = (1/\sqrt{2n})(A_{i,j} + iB_{i,j})$ oraz $A_{i,j}, B_{i,j} \sim N(0, 1)$ z losowo wyznaczonymi elementami macierzowymi (z dokładnością do hermitowskości), wyznaczyć wykres rozkładu wartości własnych tej macierzy, gdy $n \in \{25, 50, 100\}$.
4. Dla jednej rzeczywistej kwadratowej macierzy losowej X_n wymiaru $n \times n$ z normalizacją i elementami macierzowymi postaci $X_{i,j} = (1/\sqrt{n})A_{i,j}$, gdzie wszystkie $(A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ są losowo wyznaczone, wyznaczyć wykres rozkładu wartości własnych macierzy Wisharta $W_n = X_n X_n^T$, gdzie
 - (a) $n = 25$ i zmienne $A_{i,j}$ mają rozkład $N(0, 1)$,
 - (b) $n = 25$ i zmienne $A_{i,j}$ mają rozkład Bernoulliego.

Porównać otrzymane wykresy z wykresem rozkładu Marchenko-Pastura dla $t = 1$.

5. Powtórzyć poprzednie zadanie dla prostokątnej macierzy losowej X_n wymiaru 25×50 i porównać otrzymane wykresy z wykresem rozkładu Marchenko-Pastura dla $t = 2$.
6. Powtórzyć poprzednie zadanie dla prostokątnej macierzy losowej X_n wymiaru 50×25 i porównać otrzymane wykresy z wykresem rozkładu Marchenko-Pastura dla $t = 1/2$.

Romuald Lenczewski